セント・ペテルブルグ問題に関連した極限定理

杉谷 貞男 (*)

(2010 年 6 月 17 日　受付)

1. 問題と結果

完備な確率空間 (Ω, F, P) 上で定義された独立同分布な確率変数列 $\{X(n)\}_{n\geqq 1}$ を考える. ここで共通な分布は, $0<p<1, q=1-p$ と

(1)
$$r > \frac{1}{q}$$

を用いて, 以下の式で与えられるものとする.

(2)
$$P(X(k)=r^n)=pq^n \quad k=1,2,3,\cdots,\ n=0,1,2,3,\cdots\cdots$$

$r=\dfrac{1}{q}$ の場合がセント・ペテルブルグ問題で, [3] において

(3)
$$S(n)=\sum_{k=1}^{n} X(k) \quad n=1,2,3,\cdots\cdots$$

の増加の様子を調べた. このペーパーの目的は, (1) の場合に $S(n)$ の増加の様子を調べることである. そのために次の定数

(4)
$$\alpha=-\frac{\log r}{\log q}$$

を用いる. (1) と $\alpha>1$ は同値である.

定理　$\alpha>1$ とする. $0\leqq\epsilon\leqq\alpha$ に対して

(5)
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n^\alpha(\log n)^\epsilon}=\infty \quad a.s.P$$

(6)
$$\liminf_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n^\alpha(\log n)^\epsilon}=0 \quad a.s.P$$

が成り立つ. また, $\epsilon>0$ に対して

(7)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n^\alpha(\log n)^{\alpha+\epsilon}}=0 \quad a.s.P$$

(8)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\log n)^\epsilon}{n^\alpha}S(n)=\infty \quad a.s.P$$

が成り立つ.

注　(5) と (6) を示すには, 次のことを証明すれば十分である.

(9)
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S(n)}{(n\log n)^\alpha}=\infty \quad a.s.P$$

*福井大学教育地域科学部理数教育講座

$$(10) \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{S(n)}{n^\alpha} = 0 \quad a.s.P$$

次に, 上極限と下極限が異なる場合に極限分布を調べる. 実数 x に対して x 以下の最大の整数を $[x]$ と表す.

命題　$\alpha > 1$ とする. $0 < \epsilon \leqq \alpha$ に対して

$$(11) \qquad \lim_{n\to\infty} E[\exp(-\frac{\lambda S(n)}{n^\alpha (\log n)^\epsilon})] = 1$$

が $\lambda \geqq 0$ で成り立つ. $\epsilon = 0$ の場合は $f_n = \log_{\frac{1}{q}} n - [\log_{\frac{1}{q}} n]$ を考える. 任意の収束部分列 $\{f_{n_j}\}$ とその極限 f に対して

$$(12) \qquad \lim_{j\to\infty} E[\exp(-\frac{\lambda}{n_j^\alpha} S(n_j))] = \exp(\sum_{k=-\infty}^{\infty} pq^{k-f}(\exp(-\lambda r^{k-f}) - 1))$$

が $\lambda \geqq 0$ で成り立つ.

2. (9) の証明

証明には次の補題を用いる.

補題 1　$s \geqq 1$ に対して

$$(13) \qquad qs^{-\frac{1}{\alpha}} \leqq P(X(1) > s) \leqq q^{-1} s^{-\frac{1}{\alpha}}$$

が成り立つ.

証明　まず

$$P(X(1) > s) = \sum_{n: n > \frac{\log s}{\log r}} pq^n$$

と書き換える. すると

$$\begin{aligned} P(X(1) > s) &\leqq \sum_{n=[\frac{\log s}{\log r}]}^{\infty} pq^n \\ &= q^{[\frac{\log s}{\log r}]} \\ &\leqq q^{\frac{\log s}{\log r} - 1} \\ &= q^{-1} s^{-\frac{1}{\alpha}} \end{aligned}$$

$$P(X(1) > s) \geqq \sum_{n=[\frac{\log s}{\log r}]+1}^{\infty} pq^n$$

$$
\begin{aligned}
&= q^{[\frac{\log s}{\log r}]+1} \\
&\geqq q^{\frac{\log s}{\log r}+1} \\
&= qs^{-\frac{1}{\alpha}}
\end{aligned}
$$

となり, 補題 1 が証明された.

この補題より, 任意の $c > 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
P(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} \{X(k) \leqq (ck\log k)^{\alpha}\}) &= \lim_{n\to\infty} P(\cap_{k=n}^{\infty}\{X(k) \leqq (ck\log k)^{\alpha}\}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=n}^{\infty} P(X(k) \leqq (ck\log k)^{\alpha}) \\
&\leqq \lim_{n\to\infty} \prod_{k=n}^{\infty} (1 - \frac{q}{ck\log k}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

が成り立つから, 補集合の確率は

$$P(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} \{X(k) > (ck\log k)^{\alpha}\}) = 1$$

となる. これが任意の $c > 0$ に対して成り立つから

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X(n)}{(n\log n)^{\alpha}} = \infty \quad a.s.P \tag{14}$$

が成り立つ. このことと $S(n) \geqq X(n)$ より (9) は明らかである.

3. (10),(11),(12) と (7) の証明

最初に

$$
\begin{aligned}
E[\exp(-\lambda X(1))] &= \sum_{n=0}^{\infty} pq^n \exp(-\lambda r^n) \\
&= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} pq^n (\exp(-\lambda r^n) - 1)
\end{aligned}
$$

より次の等式が得られる.

$$E[\exp(-\frac{\lambda}{n^{\alpha}} X(1))] \tag{15}$$

$$= 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} pq^{k-\log_{\frac{1}{q}} n} (\exp(-\lambda r^{k-\log_{\frac{1}{q}} n}) - 1)$$

この等式を用いて次の補題を証明する.

補題 2　β と γ が $0<\beta<\dfrac{1}{\alpha}<\gamma<1$ を満たす時

(16) $$f(\lambda)=\frac{pqr^{\gamma}}{qr^{\gamma}-1}\lambda^{\gamma}+\frac{p}{1-qr^{\beta}}\lambda^{\beta}$$

は,

(17) $$E[\exp(-\frac{\lambda}{n^{\alpha}}X(1))]\geqq 1-\frac{1}{n}f(\lambda)$$

を $n\geqq 1$ と $\lambda\geqq 0$ に対して満たす.

証明　(15) を $k\leqq\log_{\frac{1}{q}}n$ における和

$$\mathrm{I}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{[\log_{\frac{1}{q}}n]}pq^{k-\log_{\frac{1}{q}}n}(\exp(-\lambda r^{k-\log_{\frac{1}{q}}n})-1)$$

と $k>\log_{\frac{1}{q}}n$ における和

$$\mathrm{II}=\frac{1}{n}\sum_{k=[\log_{\frac{1}{q}}n]+1}^{\infty}pq^{k-\log_{\frac{1}{q}}n}(\exp(-\lambda r^{k-\log_{\frac{1}{q}}n})-1)$$

に分けて

(18) $$E[\exp(-\frac{\lambda}{n^{\alpha}}X(1))]=1+\mathrm{I}+\mathrm{II}$$

と表す.

$x\geqq 0$ で $e^{-x}-1\geqq -x^{\gamma}$ が成り立ち $qr^{\gamma}>1$ だから

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&\geqq -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{[\log_{\frac{1}{q}}n]}p(qr^{\gamma})^{k-\log_{\frac{1}{q}}n}\lambda^{\gamma}\\&=-\frac{1}{n}p\frac{(qr^{\gamma})^{[\log_{\frac{1}{q}}n]+1-\log_{\frac{1}{q}}n}-(qr^{\gamma})^{-\log_{\frac{1}{q}}n}}{qr^{\gamma}-1}\lambda^{\gamma}\\&\geqq -\frac{1}{n}\frac{pqr^{\gamma}}{qr^{\gamma}-1}\lambda^{\gamma}\end{aligned}$$

となり, $x\geqq 0$ で $e^{-x}-1\geqq -x^{\beta}$ が成り立ち $qr^{\beta}<1$ だから

$$\begin{aligned}\mathrm{II}&\geqq -\frac{1}{n}\sum_{k=[\log_{\frac{1}{q}}n]+1}^{\infty}p(qr^{\beta})^{k-\log_{\frac{1}{q}}n}\lambda^{\beta}\\&=-\frac{1}{n}\frac{p(qr^{\beta})^{[\log_{\frac{1}{q}}n]+1-\log_{\frac{1}{q}}n}}{1-qr^{\beta}}\lambda^{\beta}\\&\geqq -\frac{1}{n}\frac{p}{1-qr^{\beta}}\lambda^{\beta}\end{aligned}$$

となる. これらをまとめると補題2が従う.

(10) の証明

先ず

$$E[\exp(-\frac{\lambda}{n^\alpha}S(n))] = E[\exp(-\frac{\lambda}{n^\alpha}X(1))]^n \tag{19}$$

に注意する. 簡単な計算で

$$0 \leqq y \leqq \frac{1}{2} \text{において } 1-y \geqq \exp(-y-y^2)$$

が成り立つことが分かる. ここで, $y = \dfrac{x}{n}$ とおいて両辺を n 乗すると

$$0 \leqq x \leqq \frac{n}{2} \text{において } (1-\frac{x}{n})^n \geqq \exp(-x-\frac{1}{n}x^2) \tag{20}$$

が成り立つ.
すると, (19), (20) と補題2より

$$f(\lambda) \leqq \frac{n}{2} \tag{21}$$

が満たされると

$$E[\exp(-\frac{\lambda}{n^\alpha}S(n))] \geqq \exp(-f(\lambda)-\frac{1}{n}f(\lambda)^2) \tag{22}$$

が成り立つ. 各 $\lambda > 0$ に対して n が大きければいつも (21) が満たされることに注意する. Kolmogorov の 0-1 法則により, 定数 $a (0 \leqq a \leqq \infty)$ が存在して

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S(n)}{n^\alpha} = a \quad a.s.P$$

が成り立つ. すると,

$$\begin{aligned} \exp(-a\lambda) &= E[\exp(-\liminf_{n\to\infty}\frac{\lambda}{n^\alpha}S(n))] \\ &= E[\limsup_{n\to\infty}\exp(-\frac{\lambda}{n^\alpha}S(n))] \\ &\geqq \limsup_{n\to\infty} E[\exp(-\frac{\lambda}{n^\alpha}S(n))] \\ &\geqq \exp(-f(\lambda)) \end{aligned}$$

が $\lambda > 0$ に対して成り立つから

$$\begin{aligned} a &\leqq \frac{f(\lambda)}{\lambda} \\ &= \frac{pqr^\gamma}{qr^\gamma - 1}\lambda^{\gamma-1} + \frac{p}{1-qr^\beta}\lambda^{\beta-1} \end{aligned}$$

も $\lambda > 0$ に対して成り立つ. よって $a = 0$ となり (10) が証明された.

(11) の証明

(21) と (22) で λ を $\dfrac{\lambda}{(\log n)^{\epsilon}}$ で置き換えて

$$f(\frac{\lambda}{(\log n)^{\epsilon}}) \leqq \frac{n}{2} \tag{23}$$

が満たされると

$$E[\exp(\frac{-\lambda S(n)}{n^{\alpha}(\log n)^{\epsilon}})] \geqq \exp(-f(\frac{\lambda}{(\log n)^{\epsilon}}) - \frac{1}{n}f(\frac{\lambda}{(\log n)^{\epsilon}})^2) \tag{24}$$

が成り立つ. (23) は, 各 $\lambda \geqq 0$ に対して n が大きければいつも成り立つことが分かる. よって

$$\liminf_{n\to\infty} E[\exp(\frac{-\lambda S(n)}{n^{\alpha}(\log n)^{\epsilon}})] \geqq 1$$

が $\lambda \geqq 0$ で成り立つことが分かり, (11) が従う

(12) の証明

$i_n = [\log_{\frac{1}{q}} n]$ とおけば, $\log_{\frac{1}{q}} n = i_n + f_n$ となる. すると (15) は

$$E[\exp(-\frac{\lambda}{n^{\alpha}}X(1))] = 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=-i_n}^{\infty} pq^{k-f_n}(\exp(-\lambda r^{k-f_n}) - 1) \tag{25}$$

と表される. 補題 2 の証明における I がここでの $k \leqq 0$ での和と一致し, II がここでの $k \geqq 1$ での和と一致することに注意する. 補題 2 の証明における I, II の評価より

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{k=-i_{n_j}}^{\infty} pq^{k-f_{n_j}}(\exp(-\lambda r^{k-f_{n_j}}) - 1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} pq^{k-f}(\exp(-\lambda r^{k-f}) - 1)$$

となるから (19) より (12) が成り立つことが分かる.

(7) の証明

(21) と (22) で λ を $\dfrac{\lambda}{(\log n)^{\alpha+\epsilon}}$ で置き換えて

$$f(\frac{\lambda}{(\log n)^{\alpha+\epsilon}}) \leqq \frac{n}{2} \tag{26}$$

が満たされると

$$\begin{aligned} &E[\exp(\frac{-\lambda S(n)}{n^{\alpha}(\log n)^{\alpha+\epsilon}})] \\ &\geqq \exp(-f(\frac{\lambda}{(\log n)^{\alpha+\epsilon}}) - \frac{1}{n}f(\frac{\lambda}{(\log n)^{\alpha+\epsilon}})^2) \end{aligned} \tag{27}$$

が成り立つ. λ が十分小さければ (26) は全ての $n \geqq 2$ で成り立つ. **そこで (7) の証明の間, (26) を全ての $n \geqq 2$ に対して満たす $\lambda > 0$ を一つ固定して考え**

ることにする．
$0<\beta<\dfrac{1}{\alpha}$ を $(\alpha+\epsilon)\beta>1$ となるように選び，$\epsilon_1>0$ を $(\alpha+\epsilon)\beta=1+\epsilon_1$ で定める．すると定数 $c_1>0$ が存在し

$$f(\frac{\lambda}{(\log n)^{\alpha+\epsilon}}) \leqq \frac{c_1}{(\log n)^{1+\epsilon_1}}$$

が $n \geqq 2$ に対して成り立つから，(27) より定数 $c_2>0$ が存在して

$$1-E[\exp(\frac{-\lambda S(n)}{n^\alpha(\log n)^{\alpha+\epsilon}})] \leqq \frac{c_2}{(\log n)^{1+\epsilon_1}}$$

も $n \geqq 2$ に対して成り立つ．よって

$$E[\sum_{n=1}^{\infty}(1-\exp(\frac{-\lambda S(2^n)}{2^{n\alpha}(\log 2^n)^{\alpha+\epsilon}}))]<\infty$$

となるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\exp(\frac{-\lambda S(2^n)}{2^{n\alpha}(\log 2^n)^{\alpha+\epsilon}}))<\infty \qquad a.s.P$$

が従い

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(2^n)}{2^{n\alpha}(\log 2^n)^{\alpha+\epsilon}}=0 \quad a.s.P$$

を得る．最後に

$$\begin{aligned}\max_{2^n \leqq k \leqq 2^{n+1}}\frac{S(k)}{k^\alpha(\log k)^{\alpha+\epsilon}} &\leqq \frac{S(2^{n+1})}{2^{n\alpha}(\log 2^n)^{\alpha+\epsilon}} \\ &= \frac{S(2^{n+1})}{2^{(n+1)\alpha}(\log 2^{n+1})^{\alpha+\epsilon}}\cdot 2^\alpha(\frac{n+1}{n})^{\alpha+\epsilon}\end{aligned}$$

に注意すれば (7) が従うことがわかる．

4. (8) の証明

証明には次の補題を用いる．

補題 3　$0<\epsilon<\alpha$ とする．定数 c,d を $c=\dfrac{p}{e(qr-1)}, d=\max\limits_{n \geqq 1} n^{1-\alpha}(\log n)^\epsilon$ で定めると，

(28)
$$E[\exp(-\frac{(\log n)^\epsilon}{n^\alpha}X(1))] \leqq 1-\frac{1}{n}(c(\log n)^{\frac{\epsilon}{\alpha}}-cd)$$

が $n \geqq 1$ に対して成り立つ．

証明　$n=1$ では明らかなので $n \geqq 2$ に対して証明すればよい．

$$g(n)=\sum_{k=0}^{[\log_{\frac{1}{q}} n-\epsilon\log_r \log n]} pq^{k-\log_{\frac{1}{q}} n}(1-\exp(-(\log n)^\epsilon r^{k-\log_{\frac{1}{q}} n}))$$

とおく. $0 < \epsilon < \alpha$ を仮定しているので $\log_{\frac{1}{q}} n \geqq \epsilon \log_r \log n$ が $n \geqq 2$ で成り立ち, 上の和は意味を持つ. すると (15) で λ を $(\log n)^\epsilon$ で置き換えて

$$E[\exp(-\frac{(\log n)^\epsilon}{n^\alpha}X(1))] \leqq 1 - \frac{1}{n}g(n)$$

を得る. $0 \leqq k \leqq [\log_{\frac{1}{q}} n - \epsilon \log_r \log n]$ において

$$\begin{aligned}(\log n)^\epsilon r^{k-\log_{\frac{1}{q}} n} &\leqq (\log n)^\epsilon r^{[\log_{\frac{1}{q}} n - \epsilon \log_r \log n] - \log_{\frac{1}{q}} n} \\ &\leqq (\log n)^\epsilon r^{-\epsilon \log_r \log n} \\ &= 1\end{aligned}$$

となることに注意する. 簡単な計算で

$$0 \leqq x \leqq 1 \quad \text{に対して} \quad 1 - e^{-x} \geqq \frac{x}{e} \quad \text{が成り立つ}$$

ことが分かる. そこで

$$h(n) = \sum_{k=0}^{[\log_{\frac{1}{q}} n - \epsilon \log_r \log n]} \frac{p}{e}(\log n)^\epsilon (qr)^{k-\log_{\frac{1}{q}} n}$$

とおけば $h(n) \leqq g(n)$ となるので

$$E[\exp(-\frac{(\log n)^\epsilon}{n^\alpha}X(1))] \leqq 1 - \frac{1}{n}h(n)$$

を得る. ところで $qr > 1$ だから

$$\begin{aligned}h(n) &= c(\log n)^\epsilon((qr)^{[\log_{\frac{1}{q}} n - \epsilon \log_r \log n]+1-\log_{\frac{1}{q}} n} - (qr)^{-\log_{\frac{1}{q}} n}) \\ &\geqq c(\log n)^\epsilon((qr)^{-\epsilon \log_r \log n} - (qr)^{-\log_{\frac{1}{q}} n})\end{aligned}$$

となることが分かる. ここで各々を求めると

$$\begin{aligned}q^{-\epsilon \log_r \log n} &= (\log n)^{\frac{\epsilon}{\alpha}} \\ r^{-\epsilon \log_r \log n} &= (\log n)^{-\epsilon} \\ q^{-\log_{\frac{1}{q}} n} &= n \\ r^{-\log_{\frac{1}{q}} n} &= n^{-\alpha}\end{aligned}$$

となるので

$$h(n) \geqq c(\log n)^{\frac{\epsilon}{\alpha}} - cn^{1-\alpha}(\log n)^\epsilon$$

が従い, 補題 3 が成り立つことがわかる.

(8) は $0 < \epsilon < \alpha$ に対して示せば十分である. すると, (19) と補題 3 より

$$E[\exp(-\frac{(\log n)^\epsilon}{n^\alpha}S(n))] \leqq \exp(-c(\log n)^{\frac{\epsilon}{\alpha}} + cd)$$

を得る．よって

$$E[\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\frac{(\log 2^n)^\epsilon}{2^{n\alpha}}S(2^n))] < \infty$$

となり

$$\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\frac{(\log 2^n)^\epsilon}{2^{n\alpha}}S(2^n)) < \infty \quad a.s.P$$

が従い

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\log 2^n)^\epsilon}{2^{n\alpha}}S(2^n) = \infty \quad a.s.P$$

を得る．最後に

$$\begin{aligned}\min_{2^n \leqq k \leqq 2^{n+1}}\frac{(\log k)^\epsilon}{k^\alpha}S(k) &\geqq \frac{(\log 2^n)^\epsilon}{2^{(n+1)\alpha}}S(2^n) \\ &= \frac{(\log 2^n)^\epsilon}{2^{n\alpha}}S(2^n)\cdot\frac{1}{2^\alpha}\end{aligned}$$

に注意すれば (8) が従うことが分かる．

参考文献

[1] Martin Löf,Anders:*A limit theorem which clarifies the "Petersburg Paradox"*,J.Appl.Prob **22 no.3**(1985),634-643.

[2] W. フェラー著, 河田龍夫監訳:確率論とその応用 I 下巻, 紀伊国屋書店 (1961)

[3] 杉谷貞男: セント・ペテルブルグ問題に対する極限定理, 福井大学教育地域科学部紀要　第II部　自然科学 (数学編)**60**(2009),1-8.